3 解析／問題1 基礎科目／技術士第一次試験

（3） 解析

◇ 解析

1技術士　1基礎　　H30-3-1　　H28-3-1

定積分の計算式

一次関数 ｆ(ｘ)＝ａｘ＋ｂ について定積分の $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 計算式として、最も不適切なものはどれか。

解答：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-}^{1} (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_{-1}^{1} = 2b$$

ｆ（-1）＝ｂ－ａ、ｆ（0）＝ｂ、ｆ（1）＝ａ＋ｂ　より、

① $\frac{1}{4}f(-1) + f(0) + \frac{1}{4}f(1) = \frac{3}{2}b$,

② $\frac{1}{2}f(-1) + f(0) + \frac{1}{2}f(1) = 2b$,

③ $\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = 2b$

④ $f(-1) + f(1) = 2b$,

⑤ $2f(0) = 2b$,

以上から、 ① $\frac{1}{4}f(-1) + f(0) + \frac{1}{4}f(1) = \frac{3}{2}b$,　が最も不適切である。

1技術士　1基礎　　H30-3-2　　H21-3-4

divｖ、rotｖ　の数値計算

x－y 平面において ｖ＝(u,v)＝(－xˆ2＋2xy，2xy－yˆ2) のとき、(x,y)＝(1，2) における divｖ＝∂u／∂x ＋ ∂v／∂y の値と rotｖ＝∂v／∂x － ∂u／∂y の値を求める。

解答：

$\vec{V} = (u, v) = (-x^2 + 2xy, 2xy - y^2)$　より

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2x + 2y + 2x - 2y = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mathrm{y} - 2\mathrm{x} = 2$$

以上から、divｖの値と、rotｖの値は、　$\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$ ， $\mathrm{rot}\,\vec{V} = 2$

1技術士　1基礎　　H25-3-6　　H21-3-4

rotｖ　の数値計算

２次元直交座標系（x，y）におけるベクトルを　$\vec{V} = (V_x, V_y) = (x+y, x^2)$　とする。

このとき、関数　$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}$　の、点(2,3)における値を求める。

解答：

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 2x - 1 \rightarrow \ (x, y) = (2,3) \rightarrow \ \mathrm{rot}\,\vec{V} = 3$$

1技術士　1基礎　　H30-3-3

逆行列１

行　列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$　の逆行列として、最も適切なものはどれか。

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ ac-b & c & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & 0 \\ ac-b & 1-c & 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac+b & -c & 1 \end{pmatrix}$　　⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ ac+b & c & 1 \end{pmatrix}$

解答：

$AA^{-1} = E \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Eは単位行列である。

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ として、$a_{21} = 0$ を①から⑤の値を吟味する

① $a_{21} = a * 1 + 1 * a + b * 0 = 2a$,　② $a_{21} = -a * 1 + 1 * a + 0 * b = 0$

同様にして、③ $a_{21} = 1$,　④ $a_{21} = 0$,　⑤ $a_{21} = 2a$

よって、②と④が逆行列の候補となる。

次に $a_{31} = 0$ について②と④の値を吟味する。

② $a_{31} = (ac - b) * 1 - c * a + 1 * b = 0$,　$a_{31} = (ac + b) * 1 - c * a + 1 * b = 2b$

よって、　② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$ が、行列Ａの逆行列である。

（別解：）

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$　　$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ として、

A^{-1}　＝１／（a11　a22　a33＋a12　a23　a31＋a13　a21　a32
　　　　　　　　　　　－a13　a22　a31－a12　a21　a33－a11　a23　a32)

　〔　a22　a33－a23　a32　　－（a12　a33－a13　a32)　　a12　a23－a13　a22　〕
×〔－（a21　a33－a23　a31)　　a11　a33－a13　a31　　－（a11　a23－a13　a21)〕
　〔　a21　a32－a22　a31　　－（a11　a32－a12　a31)　　a11　a22－a12　a21　〕

行列数値は、

a11＝1　　a12＝0　　a13＝0
a21＝a　　a22＝1　　a23＝0
a31＝b　　a32＝c　　a33＝1

行列数値を上式に代入すると、　A^{-1}　＝　② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列である。

・この別解は、計算の正確さと時間が求められるので、注意が必要である。

1技術士　1基礎　　H25-3-4　　H22-3-1

逆行列２

行　列　$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　の逆行列が存在する場合、その逆行列として正しいものはどれか。

解答：

行列を$\mathbb{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$　とすれば、逆行列は定義から、

$$\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbb{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad |\mathbb{A}|=ad-bc \rightarrow \ \mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

よって、行列Ａの逆行列は、$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$　である。　（※　式を覚えておくこと）

1技術士　1基礎　　H24-3-3　　H21-3-5

ヤコビ行列

座標（x,y）と変数　ξ、η　の間には、次の関係があるとする。

$x=x(\xi,\eta)$

$y=y(\xi,\eta)$

このとき、関数　f(x,y)　の　x、y　による偏微分と　ξ、η　による偏微分は次式によって関連付けられる。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}=[J]\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ここに［J］はヤコビ行列と呼ばれる2行2列の行列である。［J］の行列式を求める。

解答：

ヤコビアン行列は次のように表される。（※　式を覚えておくこと）

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad |J|=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

1技術士 1基礎　　H28-3-2

ヤコビアン

２次元の領域 D における２重積分 I の変数を x,y から変数 u,v に変換する。領域 D が領域 D’ に変換されるならば、次のようになる。

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(u,v)Jdudv$$

ここで、 J はヤコビアンである。

$\begin{cases} x = u+v \\ y = uv \end{cases}$ と変換したとき、ヤコビアン J を求める。

解答：

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix} = u - v$$

よって、**ヤコビアン J は、** $u - v$ となる。

（別解：）

線形変数を考えると、

x ＝ au＋bv ＝ u＋v　より、a＝1、b＝1

y ＝ cu＋dv ＝ uv　より、(A)の場合 c＝v、d＝0、(B)の場合 c＝0、d＝u

ヤコビ行列式＝ad－bc　より、(A)の場合「－v」、(B)の場合「u」

よって、**ヤコビアン J は、** $u - v$ となる。

1技術士 1基礎　　H30-3-4

ニュートン・ラフソン法

下図は、ニュートン・ラフソン法(ニュートン法)を用いて非線形方程式 f(x)＝0 の近似解を得るためのフローチャートを示している。

図中の(ア)及び(イ)に入れる処理を求める。

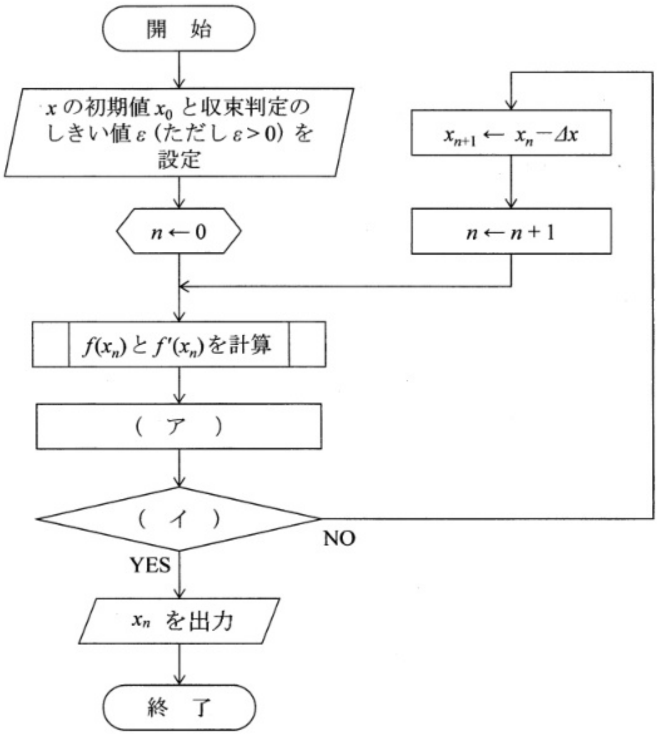


図　ニュートン・ラフソン法のフローチャート

解答：

ニュートン法を用いた非線形方程式 $f(x)=0$ の近似解は次のようにして求める。

$y=f(x)$ として、$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$

$f(x)=0$ の近似解は、$y=0$ として、$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=-f(x_n)$

$(x_{n+1}-x_n)=\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ を求め、$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ となっているかを調べる

$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ でなければ n を増やし、ε 内になるまで反復する。

よって、図中の(ア)及び(イ)に入れる処理は、　(ア) $\Delta x \leftarrow \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$　(イ) $|\Delta x|<\varepsilon$

1技術士　1基礎　H29-3-1　H24-3-4　H20-3-2

二次導関数の差分表現

導関数 d^2・u／dx^2 の点 ｘｉ における差分表現を求める。
ただし、添え字 ｉ は格子点を表すインデックス、格子幅を ｈ とする。

解答：

微分方程式の差分法から

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+o(h^2)$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+o(h^2)$$

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2u''(x)+o(h^2)$$

$h\to$小とすると、　$u''(x)=\dfrac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$u_i=u(x_i)$，　$u_{i+1}=u(x_i+h)$，　$u_{i-1}=u(x_i-h)$ であるから、

よって、二次導関数の差分表現は、　$\dfrac{d^2u}{dx^2}=\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$

（※　式を覚えておくこと）

1技術士　1基礎　　H26-3-3

一次導関数の差分表現

導関数 df／dx の点　x i　における差分表現として、誤っているものを求める。
ただし、添え字　i　は格子点を表すインデックス、Δ　は格子幅である。

①　$\dfrac{3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}}{2\Delta}$　　②　$\dfrac{f_i-f_{i-1}}{\Delta}$　　③　$\dfrac{f_{i+1}-f_i}{\Delta}$

④　$\dfrac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta}$　　⑤　$\dfrac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta}$

解答：

$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_i=\dfrac{f(x_i)-f(x_i-\Delta)}{\Delta}=\dfrac{f_i-f_{i-1}}{\Delta}$　②　　1 次後退差分（隣の格子点との差）

$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_i=\dfrac{f(x_i+\Delta)-f(x_i)}{\Delta}=\dfrac{f_{i+1}-f_i}{\Delta}$　③　　2 次中心差分（隣の格子点との差）

（一つ飛び 2 格子点）

③＋②より　$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_i-\dfrac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta}$　　④

（隣接する 3 格子点）

$\dfrac{3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}}{2\Delta}$　①　　2次後退差分である

⑤については、次のようになるため、$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_i$ の差分表現ではない。

$$\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta}=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta}-\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta}=\left(\frac{df}{dx}\right)_i-\left(\frac{df}{dx}\right)_i=0$$

（別解：）

$fi=\alpha$ とすると、$f_{i+1}-fi=fi-f_{i-1}=f_{i-1}-f_{i-2}=\alpha\Delta$ より、
$(f_{i+1}-fi)/\Delta=(fi-f_{i-1})/\Delta=(f_{i-1}-f_{i-2})/\Delta=\alpha$
よって、導関数が α となるものが正しいものになる。
①②③④⑤について、それぞれ計算すると、

① $\frac{3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}}{2\Delta}=\{3(fi-f_{i-1})-(f_{i-1}-f_{i-2})\}/2\Delta=\alpha$

② $\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta}=\alpha$

③ $\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta}=\alpha$

④ $\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta}=\{(fi-f_{i-1})+(f_{i-1}-f_{i-2})\}/2\Delta=\alpha$

⑤ $\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta}=\{(fi-f_{i-1})-(f_{i-1}-f_{i-2})\}/\Delta=0$

よって、⑤ $\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta}$ が誤りである。

1技術士 1基礎　H29-3-2
ベクトル解析

ベクトル A とベクトル B がある。A を B に平行なベクトル P と B に垂直なベクトル Q に分解する。すなわち A＝P＋Q と分解する。
A＝(6, 5, 4)、B＝(1, 2, -1) とするとき、Qの値を求める。

解答：

$\vec{Q}=(q_1,q_2,q_3)$ とすれば、$\vec{A}$ は $\vec{P}=k(1,2,-1)$ と $\vec{Q}=(q_1,q_2,q_3)$ に分解できる。

$\vec{P}$ と $\vec{Q}$ は直交するから、$\vec{P}\cdot\vec{Q}=0$ である。

よって、$\vec{P}\cdot\vec{Q}=k(q_1+2q_2-q_3)=0$

$\vec{A} = \vec{P} + \vec{Q}$ から

$$\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\2k\\-k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+q_1\\2k+q_2\\-k+q_3\end{pmatrix}$$

よって、$k+q_1=6$，　$2k+q_2=5$，$-k+q_3=4$　および　$q_1+2q_2-q_3=0$　から、

$$\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$$ 分解されたＱの値が求まる。

1技術士　1基礎　　H28-3-3　　H22-3-3

行ベクトル

ξ、η　の関数 N1、N2、N3、N4 を次の式で定義する。

N1＝1／4・(1－ξ)(1－η)　、　N2＝1／4・(1＋ξ)(1－η)　、

N3＝1／4・(1＋ξ)(1＋η)　、　N4＝1／4・(1－ξ)(1＋η)

N1、N2、N3、N4 を行ベクトルの和の形式で表すと次の式になる。

[N1　N2　N3　N4]＝a0＋ξa1＋ηa2＋ξηa3

ここに a0、a1、a2、a3 は定数項からなる行ベクトルであり、

行ベクトル a0 は、a0＝1／4・[1　1　1　1] となる。

行ベクトル a1、a2、a3 の値を求める。

解答：

$N_1 \sim N_4$　を展開すれば、

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi-\eta+\xi\eta)\,,N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi-\eta-\xi\eta)\,,$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi+\eta+\xi\eta)\ \,,N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi+\eta-\xi\eta)$$

$$[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]$$

$$= \mathbb{a}_0 + \xi\mathbb{a}_1 + \eta\mathbb{a}_2 + \xi\eta\mathbb{a}_3$$

$$= \frac{1}{4}(1+\xi a_{11}+\eta a_{21}+\xi\eta a_{31}\quad 1+\xi a_{12}+\eta a_{22}+\xi\eta a_{32}$$

$$\mathbb{a}_0 + \xi\mathbb{a}_1 + \eta\mathbb{a}_2 + \xi\eta\mathbb{a}_3$$

$1+\xi a_{13}+\eta a_{23}+\xi\eta a_{33} \quad 1+\xi a_{14}+\eta a_{24}+\xi\eta a_{31})$

Nの行ベクトルと行列　　の各要素を求めると、

a0＝1／4・[1 1 1 1]

a1＝1／4・[－1 1 1 －1]

a2＝1／4・[－1 －1 1 1]

a3＝1／4・[1 －1 1 －1]

1技術士 1基礎　H26-3-1　H22-3-2

二次元流速ベクトル

x－y 平面における二次元流速ベクトルを u＝(u, v) とするとき、その平面上のすべての点において、次の非圧縮性流れの連続の式 ∂u／∂x ＋ ∂v／∂y ＝ 0 を満足する u の値を求める。

① u＝(x, y)

② u＝(x, －y)

③ u＝(xy, xy)

④ u＝(xy, －xy)

⑤ u＝(x^2, －y^2)

解答：

①②③④⑤について、値を代入して計算すると、

① $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=1+1=2$, ② $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=1-1=0$, ③ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=y+x$

④ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=y-x$, ⑤ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=2x-2y$

よって、**求めるuの値は、② u＝(x, －y)** となる。

1技術士 1基礎　H26-3-4

二次元ベクトルの内積

二次元ベクトル a＝(ax, ay) と b＝(bx, by) の内積 a・b を表す式を求める。

解答：

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = (a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y) = a_x b_x + a_y b_y$$

内積の定義である。　　　　　　　　**（※ 式を覚えておくこと）**

1技術士　1基礎　　H29-3-3　　H27-3-3-4　　H24-3-1

有限要素法の特性

材料が線形弾性体であることを仮定した構造物の応力分布を、有限要素法により解析するときの要素分割に関する記述である。

・有限要素法の**要素分割を細かくすると近似誤差は小さくなる。**
・応力の変化が大きい部分に対しては、要素分割を細かくするべきである。
・応力の変化が小さい部分に対しては、応力自体の大小にかかわらず要素分割の影響は小さい。
・要素分割の影響を見るため、複数の要素分割によって解析を行い、結果を比較することが望ましい。
・粗い要素分割で解析した場合には、**変形を細かく描けないために、正確な応力の解析ができず、応力評価は安全側にならない。**
・ある荷重に対して有効性が確認された要素分割でも、他の荷重に対しては有効とは限らない。

1技術士　1基礎　　H27-3-3

数値解析の誤差

・浮動小数点演算において近接する２数の引き算では、有効桁数が失われる桁落ち誤差を生じることがある。
・非線形現象を線型方程式系で**近似した段階で誤差が含まれるため**、線型方程式の数値計算法が数学的に厳密であっても、得られる結果に**数値誤差が発生する。**
・テイラー級数展開に基づき微分方程式を差分方程式に置き換えるときの近似誤差は、**格子幅の大小によって近似誤差も変動し、格子幅を小さくすれば小さくなる。**
・数値計算の誤差は対象となる物理現象の法則により、計算アルゴリズムを改良したり、格子幅や要素分割を細かくすることで、**近似誤差を減少させることができる。**

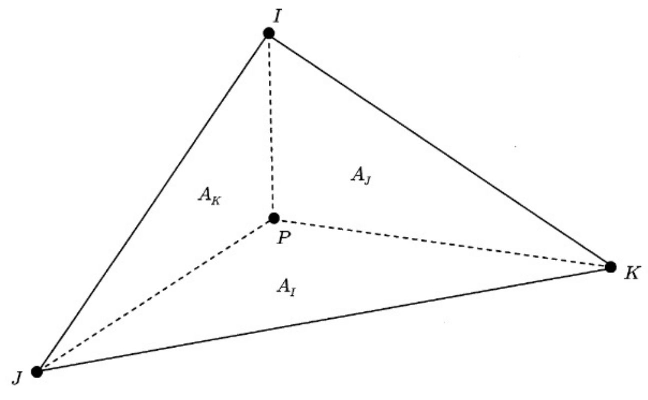
1技術士 1基礎　　H26-3-2
数値解析の精度向上法

・有限要素解析において、解の変化が大きい領域の要素分割を細かくする。
・有限要素解析において、高次要素を用いて要素分割を行う。
・有限要素解析において、できるだけゆがんだ要素ができないように要素分割を行う。
・丸め誤差を小さくするため、計算機の浮動小数点演算を単精度から倍精度に変更する。

・以下の方法は、不適切である。
　Newton法などの反復計算においては、反復回数が多いので**収束判定条件を緩和すると、精度が低下し、誤差が大きくなる。**

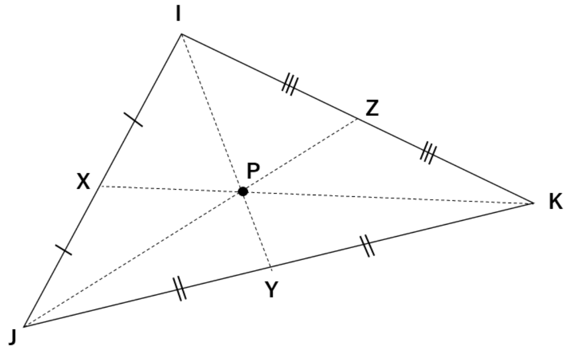
1技術士 1基礎　　H25-3-3
有限要素法の面積座標

　有限要素法において三角形要素の剛性マトリクスを求める際、しばしば面積座標が使用される。
　下図に示すように、任意の点 P の面積座標は（AI／A，AJ／A，AK／A）で表される。ただし、A は3点（I，J，K）を頂点とする三角形の面積である。
　同様に AI、AJ、AK はそれぞれ(P，J，K)、(P，K，I)、(P，I，J)を頂点とする三角形の面積である。
　点 P を三角形 A の重心とすると、点 P の面積座標を求める。



解答：
三角形ＫＩＪを、図のように補助線を入れ、Ｘ,Ｙ,Ｚを定める。
Ｐは重心であるから、線分は ＩＸ＝ＸＪ、ＪＹ＝ＹＫ、ＫＺ＝ＺＩである。
三角形ＩＪＫと三角形ＩＹＫの面積は等しく、ＰＪＹとＰＹＫの面積が等しい。

よって、三角形ＩＰＫと三角形ＩＰＪの面積が等しくなる。



従って、 $A_K = A_I = A_J = \frac{1}{3}A$ 　、 Ｐの面積座標は、 $\left(\frac{A_I}{A}, \frac{A_J}{A}, \frac{A_K}{A}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1技術士 1基礎 　　H28-3-4

重積分の値

　x－y 平面上において、直線 x＝0、y＝0、x＋y＝a（ただし、a>0とする）で囲まれる領域を Ｓ とするとき、２変数関数 f(x,y) の Ｓ における重積分は以下のように表される。

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \int_0^a \left\{ \int_0^{a-y} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

f(x,y)＝x＋y 及び a＝2 であるとき、重積分 $\iint_S f(x,y)\,dxdy$ の値を求める。

解答：

$$S = \iint_S f(x,y)dxdy = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2\ \ y} (x+y)dx \right\} dy$$

$$\int_0^{2-y} (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{2-y} = 2 - \frac{y^2}{2}$$

$$S = \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[2y - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

よって、**重積分の値は、８／３**である。

1技術士 1基礎 　　H27-3-1

２次の補間多項式

f(−1)＝2、f(0)＝2、f(2)＝8 が与えられた場合、

２次の補間多項式で近似したときの、 f(1) の値を求める。

解答：

$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ とすると、

$f(-1) = 2 = a_1 - a_2 + a_3$

$f(0) = 2 = a_1$

$f(2) = 8 = a_1 + 2a_2 + 4a_3$

$\therefore\ a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1 \ \rightarrow\ f(x) = 2 + x + x^2$

$\therefore\ f(1) = 4$

（別解：）

ラグランジュの補間多項式を用いると

$$f(x) = y_1 \times \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \times \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \times \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 8, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$

$f(x) = x^2 + x + 2$

$\therefore\ f(1) = 4$

1技術士 1基礎　　H27-3-2

偏微分の計算

ψ ＝ 2x－x^2・y のとき、点(1,－1)での ∇φ の値を求める。
ただし、 ∇φ＝(∂φ／∂x, ∂φ／∂y) である。

解答：

与えられた式から、

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = (2 - 2xy, -x^2)$$

$(x, y) = (1, -1)$ では $\nabla\psi = (4, -1)$

◇ 力学

1技術士 1基礎　　H30-3-5
ばねのポテンシャルエネルギー

下図に示すように、重力場中で質量 m の質点がバネにつり下げられている系を考える。ここで、バネの上端は固定されており、バネ定数は k(>0) 、重力の加速度は g 、質点の変位は u とする。

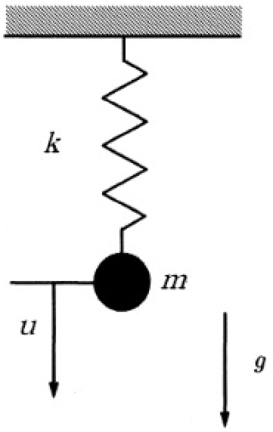


図　重力場中で質点がバネにつり下げられている系

解答：
・質点の釣合い位置において、全ポテンシャルエネルギー Πp は最小となる。

$$\prod_p = \frac{1}{2}ku^2 - mgu = \frac{1}{2}mgu - mgu = -\frac{1}{2}mgu$$

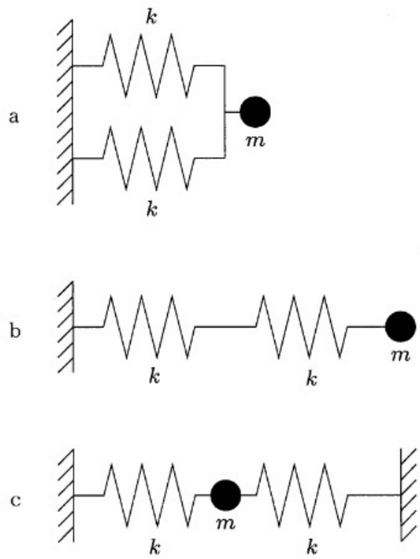
であるからポテンシャルは最小である。

・質点に作用する力の釣合い方程式は、 ku＝mg と表すことができる。
・全ポテンシャルエネルギー(＝内部ポテンシャルエネルギー＋外力のポテンシャルエネルギー) Πp は、 Πp＝1／2・ku^2－mgu と表すことができる。
・質点に作用する力の釣合い方程式は、全ポテンシャルエネルギー Πp の停留条件、 dΠp／du＝0 から求めることができる。
・全ポテンシャルエネルギー Πp の極値問題として静力学問題を取り扱うことが、有限要素法の固体力学解析の基礎となっている。

1技術士 1基礎　　H26-3-5　　H24-3-2

ばねの固有振動数

下図に示すように、2つのばねと1つの質点からなるばね質点系 a、b、c がある。図中のばねのばね定数はすべて同じ k であり、また、図中の質点の質量はすべて同じ m である。最も小さい固有振動数を有するばね質点系として正しいものを考える。



解答：

・固有振動数＝√（ばね定数／質量）となる。
・ａの並列の場合のばね定数は、各ばね定数の和となる。
・ｂの直列の場合のばね定数は、ばね定数の逆数が各ばね定数の逆数の和となる。
・ｃのような場合のばね定数は、力が逆に作用するため並列と同様になる。

ばね定数 k 、おもりの質量 m のばね質点系の固有角振動数は、次のようになる。

固有振動数　$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ａの並列の場合　①の合成ばね定数　$K = k + k = 2k \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

ｂの直列の場合　②の合成ばね定数　$K = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k}} = \frac{k}{2} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

ｃの並列と同様の場合　③の合成ばね定数　$K = k + k = 2k \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

よって、bのみが、最も小さい固有振動数を有するばね質点系である。

1技術士 1基礎　　H30-3-6　　H22-3-5

上端を固定した棒の伸び

長さ 2m 、断面積 100mm^2 の弾性体からなる棒の上端を固定し、下端を 4kN の力で下方に引っ張ったとき、この棒に生じる伸びの値を求める。
ただし、この弾性体のヤング率は 200 GPa とする。なお、自重による影響は考慮しないものとする。

解答：

P：力,l：棒の長さ(m),A：棒の断面積(m^2),E：ヤング率(N/m^2)として、

棒の伸びをδとし、フックの法則より、

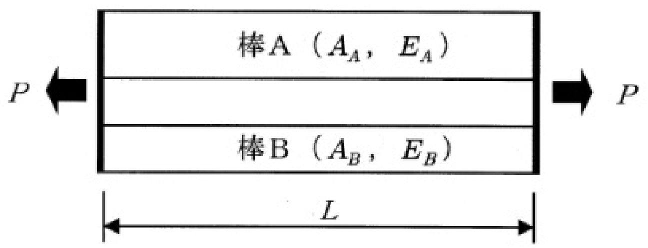
$$\delta = \frac{Pl}{AE} = \frac{4 \times 10^3 \times 2}{100 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} = 4 \times 10^{-4}\ \mathrm{m} = 0.4\ \mathrm{mm}$$

よって、棒に生じる伸び ＝ 0.4mm

1技術士 1基礎　　H28-3-6

２本の棒に生じ引張応力

下図に示すように、同じ長さ L の棒 A（断面積 AA 、縦弾性係数（ヤング係数） EA ）と棒 B（断面積 AB 、縦弾性係数（ヤング係数） EB ）の両端が剛板に接着され、そこに引張力 P が作用している。棒 A と棒 B には、同じ長さの伸びが生じる。
このとき、棒 A と棒 B に生じている引張応力 σA と σB の比を求める。



解答：

棒A、Bに生じる軸力を P_A, P_B とすれば、$P = P_A + P_B$ である。

棒に生じる応力は、$\sigma_A = \frac{P_A}{A_A}$, $\sigma_B = \frac{P_B}{A_B}$　である。

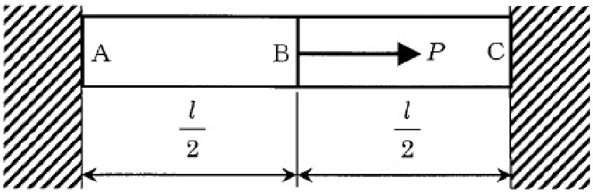
棒に生じる歪は棒のどちらも同じであるから、$\varepsilon = \frac{\sigma_A}{E_A} = \frac{\sigma_B}{E_B}$

よって、**棒Ａと棒Ｂに生じている引張応力σＡとσＢの比は、** $\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{E_A}{E_B}$　となる。

1技術士　1基礎　　H27-3-5

両端固定のはり中央の変位

下図に示すような両端を剛体壁に固定された断面積　Ｓ　、長さ　ｌ　の棒がある。棒を二等分する点を　Ｂ　点とし、ＡＢ間、ＢＣ間の縦弾性係数(ヤング率)を　E1　、　E2　とするとき、荷重　Ｐ　が棒の軸方向に負荷された場合の点　Ｂ　の変位　δ　を求める。



解答：

棒ＡＢ間の変位を　δ１　、棒ＢＣ間の変位を　δ２　とすると、
棒は一様な圧縮応力を受けていることから、7

$$\delta_1 = \frac{P\frac{l}{2}}{SE_1},\qquad \delta_2 = \frac{P\frac{l}{2}}{SE_2}$$

よって、**全体の変位は、**$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{Pl}{2S(E_1+E_2)}$ である。

（別解：）

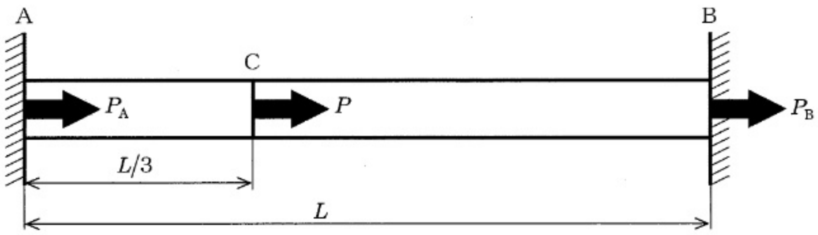
・ＡＢ間、ＢＣ間の応力合計は　Ｐ／Ｓ　となる。
・ＡＢ間の引っ張り力と、ＢＣ間の圧縮力は等しい。
　よって、Ｐ／Ｓ　＝　E1×δ／(1/2)　＋　E2×δ／(1/2)　となる。

　これより、**点Ｂの変位δを求めると、**　$\delta = \frac{Pl}{2S(E_1 + E_2)}$

1技術士 1基礎　　H26-3-6　　H24-3-5

両支持点に作用する反力

下図に示すように、両端で固定された一様な弾性体からなる、長さ Ｌ の棒がある。図に示すように、左端から長さ Ｌ／３ の位置 Ｃ に力 Ｐ が作用する。ただし、力は図中の矢印の向きを正とする。
このとき、支持点 Ａ と Ｂ で棒に作用する反力 PA と PB を求める。



解答：

力のつり合いから、$P_A + P_B + P = 0$

ＡＣ間の伸縮量 δ_a と、ＢＣ間の伸縮量 δ_b は同じであるから、

$$\delta_a = \frac{P_A\left(\frac{L}{3}\right)}{AE} = \frac{P_A L}{3AE}\ ,\qquad \delta_b = \frac{P_B\left(L - \frac{L}{3}\right)}{AE} = \frac{2P_B L}{3AE}$$

$$\delta_a = \delta_b \rightarrow \quad \frac{P_A L}{3AE} = \frac{2P_B L}{3AE}$$

$$\therefore\ P_A = 2P_B \rightarrow\ 2P_B + P_B + P = 0$$

$$\therefore\ P_A = -\frac{2}{3}P\ ,\qquad P_B = -\frac{1}{3}P$$

（別解：）

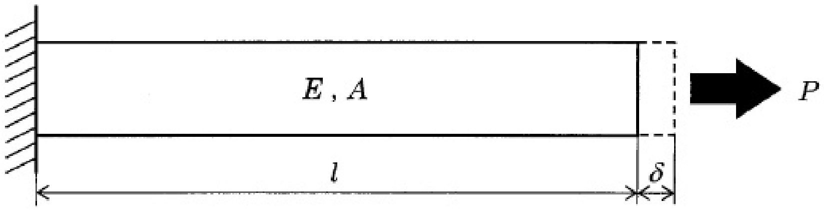
力のつり合いから、$P_A + P_B + P = 0$

・また、ＡＣ間と、ＢＣ管の伸縮は等しいため、次の式が成り立つ、
　ＰＡ×L/3×断面積×ヤング ＝ ＰＢ×2L/3×断面積×ヤング率
　これらを解くと、**反力 PA と PB** は、 $P_A = -\frac{2}{3}P\ ,\quad P_B = -\frac{1}{3}P$

1技術士 1基礎　　H25-3-5

片固定梁の荷重とひずみエネルギー

下図のように、左端を固定された長さ l 、断面積 A の棒が、右端に荷重 P を受けている。このとき棒が微小長さ δ 伸びたとし、この棒のヤング率を E とする。荷重 P と、棒全体に蓄えられるひずみエネルギー U を求める。



解答：

垂直応力と縦弾性係数の定義より、Pを求める。

垂直応力 σ ＝ P / A

縦弾性係数(ヤング率) E ＝ σ / ε

弾性ひずみ ε ＝ σ / E ＝ P / AE

$$\delta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Pl}{AE} \rightarrow P = \frac{AE\delta}{l}$$

ひずみエネルギー公式より、Uを求める。

$$U = \frac{P\delta}{2} = \frac{AE\delta^2}{2l}$$

1技術士 1基礎　　H29-3-5

部材軸方向の伸び

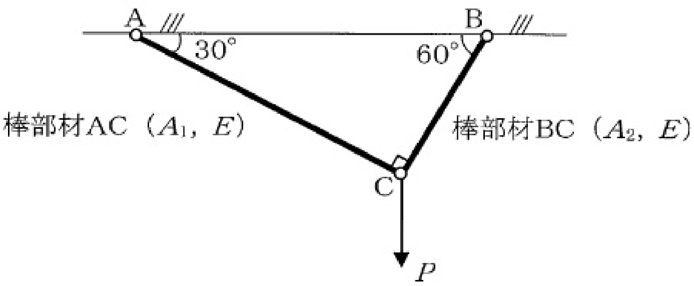
両端にヒンジを有する２つの棒部材　ＡＣ　と　ＢＣ　があり、点　Ｃ　において鉛直下向きの荷重　Ｐ　を受けている。

棒部材　ＡＣ　の長さは　Ｌ　であり、棒部材　ＡＣ　と　ＢＣ　の断面積はそれぞれ　Ａ1　と　Ａ2　である。

縦弾性係数(ヤング係数)はともに　Ｅ　である。

棒部材　ＡＣ　と　ＢＣ　に生じる部材軸方向の伸びをそれぞれ　δ1　と　δ2　とするとき、その比（δ1／δ2）を求める。

なお、棒部材の伸びは微小とみなしてよい。



解答：

ACの軸力をP_1 、CBの軸力をP_2 とし、AC、BCの伸びをδ_1, δ_2 とすれば、

$$P_1 = P\cos 60° = \frac{P}{2}, P_2 = P\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

AB間の距離をL とすれば、ACとBCの長さは、$l_1 = L\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}L, l_2 = L\cos 60° = \frac{L}{2}$

$$\delta_1 = \frac{P_1 l_1}{A_1 E} = \frac{P l_1}{2A_1 E} = \frac{\sqrt{3}PL}{4A_1 E}, \delta_2 = \frac{P_2 l_2}{A_2 E} = \frac{\sqrt{3}PL}{4A_2 E}$$

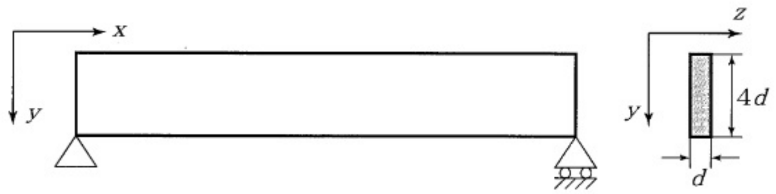
よって、$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{A_2}{A_1}$　　棒部材軸方向の伸びの比（δ1／δ2）が求まる。

1技術士 1基礎　　H29-3-6　　H25-3-2　　H21-3-2

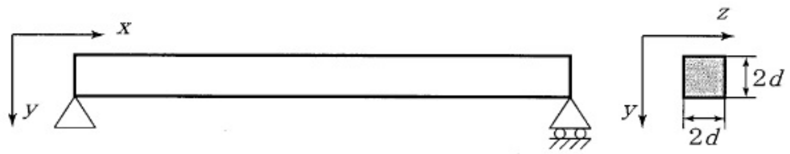
最小一次固有振動数

下図に示す、長さが同じで同一の断面積 4d^2 を有し、断面形状が異なる３つの単純支持のはり (a)、(b)、(c) の ｘｙ 平面内の曲げ振動について考える。
これらのはりのうち、最も小さい１次固有振動数を有するものを求める。
ただし、はりは同一の等方性線形弾性体からなり、はりの断面は平面を保ち、断面形状は変わらず、また、はりに生じるせん断変形は無視する。

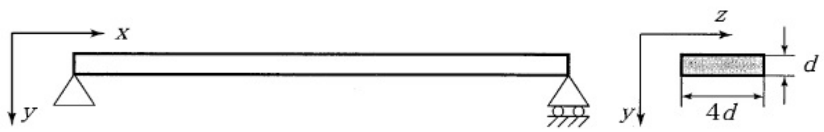
（ａ）



（ｂ）



（ｃ）



解答：

曲げ振動するはりの固有角振動数ω_n は、はりの質量をm 、長さをL 、ヤング率をE 、

断面二次モーメントをI とすれば、　$\omega_n(i) = \pi^2 i^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$　となる。

ここで、i　は次数で一次固有振動数を求めるから1である。

断面積はどのはりも同じであるから質量は同じで、長さも同じであるから、固有振動数の比較は、断面二次モーメントを比較すればよい。

なお、固有振動数は、$\frac{1}{2\pi}\omega_n$ である。

断面二次モーメント　I ＝ 1/12･bh^3 より、

(a)、（ｂ）、(c)の断面二次モーメントを　I_a, I_b, I_c　として計算すると、

$$I_a = \frac{1}{12} d \times (4d)^3 = \frac{16}{3} d^4$$

$$I_b = \frac{1}{12}(2d) \times (2d)^3 = \frac{2}{3} d^4$$

$$I_c = \frac{1}{12}(4d) \times d^3 = \frac{1}{3} d^4$$

よって、**最も小さい１次固有振動数を有するはりは、(c)である。**

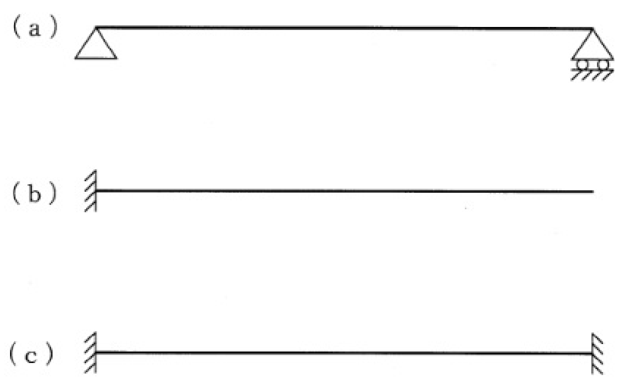
1技術士　1基礎　　H28-3-5　　H23-3-4

はりの最小固有振動数

下図に示す支持条件の異なる３つのはり (a)、(b)、(c) を考える。３つのはりの材料及び断面の形状と寸法は全て同じである。

これらのはり (a)、(b)、(c) の最も小さい固有振動数をそれぞれ fa、fb、fc とすると、 fa、fb、fc に関する大小関係を求める。

ただし、はりのせん断変形は無視できるものとする。



解答：

はりの１自由度振動系としての運動方程式は、次のようになる。

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

この系の固有角振動数 ω_n は、$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である。

k の値は、はりに力P を加えたときのはりのたわみに対するばね定数として求められ

る。よって、$P = \delta k \rightarrow k = \frac{P}{\delta}$

$(a)\ \delta = \dfrac{Pl^3}{48EI} \rightarrow k = \dfrac{48EI}{l^3}$

$(b)\ \delta = \dfrac{Pl^3}{3EI} \rightarrow k = \dfrac{3EI}{l^3}$

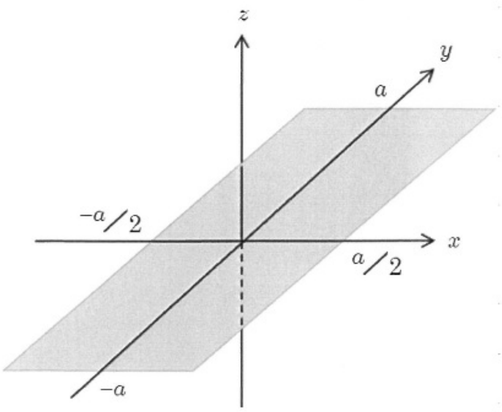
$(c)\ \delta = \dfrac{Pl^3}{192EI} \rightarrow k = \dfrac{192EI}{l^3}$

以上から、fa、fb、fc に関する大小関係は、 $f_b < f_a < f_c$ となる。

1技術士 1基礎 H27-3-4

軸回り慣性モーメント

下図のように、均質かつ厚さが一様で薄い長方形の板が、xy平面内に x、y軸がそれぞれ辺の中点を通るように置かれている。x方向の辺の長さを a、y方向の辺の長さを 2a とし、x、y、z軸の回りの慣性モーメントをそれぞれ Ix、Iy、Iz とする。Ix、Iy、Iz のうち最大のものを求める。



解答：

$$I_x = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_y = \frac{1}{3}M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ma^2$$

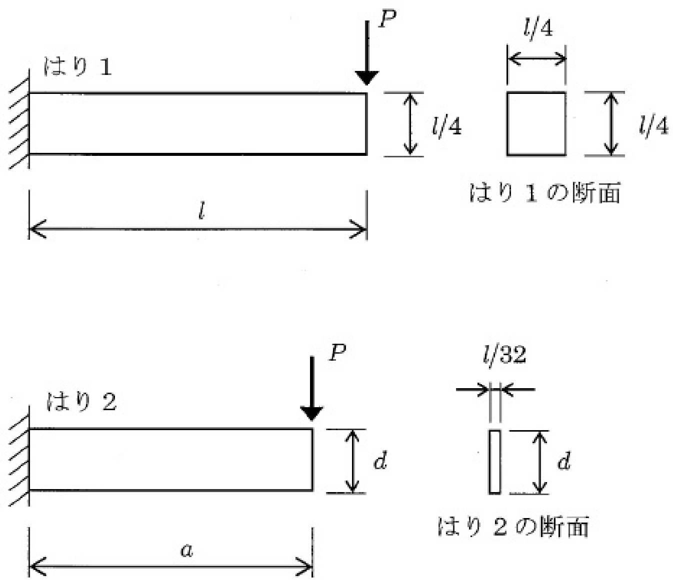
$$I_z = \frac{1}{3}M\left(a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{12}Ma^2$$

よって、$I_z > I_x > I_y$ 最大となる慣性モーメントは、Iz である。

（別解：）
z軸周りの慣性モーメントは、**直交軸の定理により、** $I_z = I_x + I_y$ となるため、
常に Iz が最大となる。

1技術士 1基礎　　H27-3-6
単純梁のたわみ

下図に示すように、長さが l のはり1の左端を完全に固定し、自由端面において鉛直下方に荷重 P を負荷した。はり１の断面幅と断面高さはともに l／４ である。
同様に、長さが a のはり２の左端を完全に固定し、自由端面において鉛直下方にはり１と同一の荷重 P を負荷した。はり２の断面幅は l／３２、断面高さは d である。
はり１とはり２の自由端面に生じる鉛直方向のたわみが等しいとき、 a と d が満たしている条件式を求める。
ただし、はり１とはり２は、同じヤング率 E を持つ等方性線形弾性体であり、はりの断面は荷重を負荷した前後で平面を保ち、断面形状は変わらず、はりに生じるせん断変形、及び自重は無視する。



解答：

断面二次モーメントＩは、Ｉ ＝ 1/12･bh^3

たわみ量δは、 $\delta = \dfrac{P l^3}{3 E I_z}$

はり1、はり2の断面二次モーメントを、I_{z1}, I_{z2}　とすると、

$$I_{z1}=\frac{1}{12}\cdot\frac{l}{4}\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^3=\frac{l^4}{12\times 4^4}\ ,\qquad I_{z2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{l}{32}\cdot d^3=\frac{ld^3}{12\times 32}$$

はり1とはり2のたわみが同じであるから、

$$\delta=\frac{Wl^3}{3EI_{z1}}=\frac{Wa^3}{3EI_{z2}}\ \rightarrow\ \frac{l^3}{I_{z1}}=\frac{a^3}{I_{z2}}$$

$$\frac{l^3}{\frac{l^4}{12\times 4^4}}=\frac{a^3}{\frac{ld^3}{12\times 32}}\ \rightarrow\ \frac{a}{d}=2$$

よって、**a と d が満たしている条件式は**、 $\frac{a}{d}-2$　となる。

1技術士　1基礎　　H25-3-1

直交座標の垂直ひずみ

直交座標系における垂直応力の３成分を　σｘ、σｙ、σｚ　としたとき、ｘ方向の垂直ひずみ　εｘ　を与える式を求める。
なお、材料は、ヤング率　Ｅ　、ポアソン比　ｖ　の等方線形弾性体であるとする。

解答：

応力を　σ　、ヤング率を　E　とするとひずみ　ε　は、 $\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$　となる。

σ_x　による　x　方向のひずみは、$\varepsilon_{xx}=\frac{\sigma_x}{E}$

σ_y　による　x　方向のひずみは、$-\varepsilon_{xy}=-\frac{\varepsilon_y}{m}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{\sigma_y}{E}$

σ_z　による　x　方向のひずみは、$-\varepsilon_{xz}=-\frac{\varepsilon_z}{m}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{\sigma_z}{E}$

$m\left(=\frac{1}{\nu}\right)$ はポアソン数、 ε_y は σ_y によるｙ方向のひずみ、 ε_z は σ_z によるｚ方向のひずみとすると、

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{xy}-\varepsilon_{xz}=\frac{\sigma_x}{E}-\frac{1}{m}\cdot\frac{\sigma_y+\sigma_z}{E}=\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\}\frac{1}{E}$$

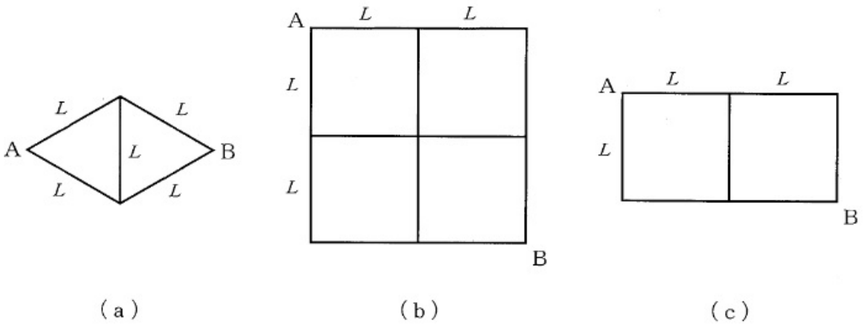
よって、**ｘ方向の全ひずみの式は**、 $\varepsilon_x=\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\}\frac{1}{E}$　で与えられる。

◇ 電磁気学

1技術士 1基礎　　H29-3-4

回路の合成抵抗

長さが L、抵抗が r の導線を複数本接続して、下図に示すような３種類の回路 (a)、(b)、(c) を作製した。 (a)、(b)、(c) の各回路における ＡＢ 間の合成抵抗の大きさをそれぞれ Ra、Rb、Rc とするとき、 Ra、Rb、Rc の大小関係を求める。
ただし、導線の接合点で付加的な抵抗は存在しないものとする。



解答：

(a)：ブリッジ回路は平衡であるため、この回路の抵抗は、２つの直列抵抗が２つ平行に合成した抵抗値となる。

$$R_a = \frac{2r \times 2r}{2r + 2r} = r$$

(b)：回路に流れる電流は図に示したようになる。ＡＢ間の電圧降下から、

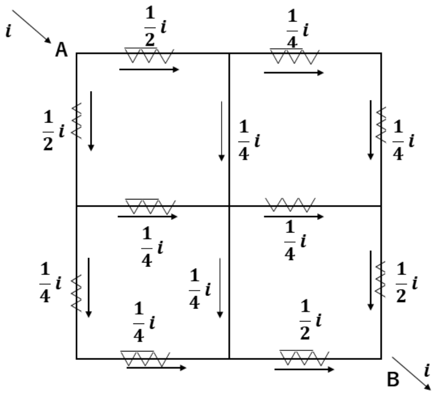
$$\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}i + \frac{1}{2}i\right)r = R_b i$$

$$R_b = 1.5r$$

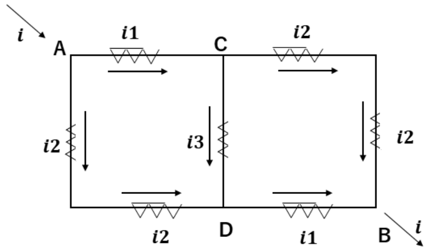
(c)：回路に流れる電流は図に示したようになる。

$$i = i1 + i2$$

$$i1 = i2 + i3$$



(b)



(c)

$$ri1 = 2ri2 - ri3$$

$$\therefore \quad i1 = 0.6i\,, i2 = 0.4i\,, i3 = 0.2i$$

$$r(i1 + 2i2) = R_c i$$

$$R_c = 1.4r$$

以上から、Ra、Rb、Rc の大小関係は、 $R_a < R_c < R_b$ となる。

技術士第一次試験　　問題1　基礎科目　　(3) 解析〔力学、電磁気学等〕

◎は、予想が的中したものです。

	重点予想	H30	H29	H28	H27	H26	H25	H24	H23	H22	H21	H20
(3) 解析												
◇ 解析		◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇		◇	◇	◇
定積分の計算式		◎		○								
divv、rotv の数値計算		◎									○	
rotv の数値計算							◎				○	
逆行列1		○										
逆行列2							◎			○		
ヤコビ行列								◎			○	
ヤコビアン	○			○								
ニュートン・ラフソン法		○										
二次導関数の差分表現			◎					◎				○
一次導関数の差分表現	○					○						
ベクトル解析	○		○									
二次元流速ベクトル						◎				○		
二次元ベクトルの内積	○					○						
有限要素法の特性	○		◎		◎			○				
数値解析の誤差	○				○							
数値解析の精度向上法	○					○						
有限要素法の面積座標	○						○					
重積分の値	○			○								
2次の補間多項式	○				○							
偏微分の計算	○				○							
◇ 力学		◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	
ばねのポテンシャルエネルギー		○										
ばねの固有振動数	○					◎		○				
上端を固定した棒の伸び		◎								○		
2本の棒に生じ引張応力	○			○								
両端固定のはり中央の変位	○				○							
両支持点に作用する反力						◎		○				
片固定梁の荷重とひずみエネルギー	○						○					
部材軸方向の伸び			○									
最小一次固有振動数			◎				◎				○	
はりの最小固有振動数	○			◎					○			
軸回り慣性モーメント	○				○							
単純梁のたわみ	○				○							
直交座標の垂直ひずみ							○					
◇ 電磁気学			◇									
回路の合成抵抗			○									